Varietà e Questioni proposte

La teoria matematica della lotta per l'esistenza secondo Vito Volterra.

Sono passati ormai 130 anni da quando l'economista inglese MALTHUS enunciava la celebre legge dell'incremento della popolazione: la popolazione, restando invariate le condizioni d'ambiente, cresce in proporzione geometrica, mentre i viveri crescono solo in proporzione aritmetica. Malthus poneva cosí in evidenza una contraddizione, da cui resulta la necessità di un ostacolo all'incremento normale della popolazione. È chiaro infatti che la sua legge non può essere legge di accrescimento, ma solo legge di tendenza o — come la considera il MESSEDAGLIA — legge differenziale dell'incremento, ove conviene assumere il coefficiente incrementale variabile, appunto in ragione degli alimenti. Del resto, nel concetto popolare, il nome di Malthus è rimasto legato, piuttosto che al ricordo della scoperta scientifica, all'idea della limitazione della prole, pro e contro la quale si sono battuti e si battono ancora sociologhi e moralisti.

Frattanto però la veduta dell'economista inglese, applicata in genere alle specie viventi, ha esercitato un forte influsso su DARWIN. Questi ne ha tratto l'idea della lotta per l'esistenza e quindi della « selezione naturale » che, nella dottrina del grande naturalista, diviene il regolatore dell'evoluzione delle specie organiche.

Darwin non ha svolto una teoria matematica della lotta per l'esistenza, ma — in maniera qualitativa — ha pure intravisto alcune conseguenze notevoli dell'associazione biologica per cui sussistono in un medesimo ambiente specie diverse, che si nutrono dello stesso alimento ovvero vivono l'una a spese dell'altra. Oggi VITO VOLTERRA, richiamato su tale questione dalle osservazioni statistiche del dott. D'ANCONA, traduce in forma matematica alcune semplici ipotesi che derivano dalla legge di Malthus, e inizia così una teoria matematica della lotta per l'esistenza.

Il problema trattato dal Volterra consiste precisamente nello studio delle « Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui di specie animali conviventi » (1), in particolare del caso di un numero qualunque di specie che si cibano l'una dell'altra. Noi ci limiteremo a spiegare come tale problema venga posto in equazione, riferendoci all'ipotesi più semplice di due sole specie.

Anzitutto si dia forma analitica alla legge di Malthus o per meglio dire a quella parte della legge che concerne l'incremento delle specie in ragion geometrica, lasciando cadere l'assunto (già arbitrario per gli alimenti dell'uomo, e che verrà qui opportunamente modificato) riguardante l'accrescimento degli alimenti. Se N è il numero degli individui d'una specie che vivono in un certo ambiente al tempo t, e si dà un coefficiente costante di accrescimento della specie, ε, nell'intervallo di tempo dt l'accrescimento di N sarà

$$dN = \varepsilon N dt;$$

da cui — integrando — resulta la legge esponenziale

$$N = e^{\varepsilon t}.$$

Ponganși ora due specie che convivano nello stesso ambiente, p. es. due specie di pesci, una delle quali si nutra dell'altra. Alla prima specie, contenente N_1 individui, possiamo supporre un coefficiente d'accrescimento positivo ε_1; alla seconda specie — con N_2 individui — che per ipotesi si nutre della prima, si attribuirà un coefficiente d'accrescimento negativo, $-\varepsilon_2$, assumendosi che la specie stessa si esaurirebbe in mancanza del nutrimento offerto dall'altra.

In tali ipotesi, se le due specie fossero isolate, sussisterebbero le equazioni differenziali

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2;$$

ma se le specie convivono, il coefficiente ε_1 diminuisce mentre $-\varepsilon_2$ cresce. Volterra assume che ε_1 diminuisca in proporzione del numero N_2 degli animali mangianti, e invece $-\varepsilon_2$ cresca in ragione del numero degli animali della specie mangiata: così, dopo il

(1) *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, serie sesta, II, 3 (1926).

tempo dt, ε_1 si cambierà in $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$, e $-\varepsilon_2$ in $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$, sicchè avremo

$$1) \quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \dfrac{dV_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2. \end{cases}$$

Le variazioni di N_1 e N_2 si otterranno dunque integrando il sistema delle equazioni differenziali 1). Fra N_1 e N_2 si trova una relazione in termini finiti che è della forma:

$$\left(\frac{N_1}{e^{N_1}}\right)^{\varepsilon_1} = C\left(\frac{N_2}{e^{N_2}}\right)^{-\varepsilon_2}.$$

Il nostro autore discute direttamente la soluzione del problema e particolarmente questo integrale, col sussidio di diagrammi geometrici. Egli è condotto così a riconoscere che: *Le fluttuazioni delle specie sono periodiche. Le medie dei numeri d'individui delle due specie non dipendono dalle condizioni iniziali finchè si mantengono inalterati i coefficienti d'accrescimento e di voracità.*

Inoltre: *se si cerca di distruggere ambedue le specie, la media del numero d'individui della specie mangiata cresce, e la media del numero d'individui della specie mangiante diminuisce;* almeno finchè non si superi un certo limite, al di là del quale si va all'esaurimento d'ambedue le specie.

Quest'ultima legge si trova verificata dalle osservazioni statistiche del D'Ancona, intorno alla pesca fatta nell'Adriatico durante la guerra e in periodi prebellici o postbellici: poichè la guerra aveva in gran parte interrotto la distruzione sistematica dovuta alla pesca, le specie mangianti si trovavano in quel periodo accresciute, mentre le specie mangiate erano notevolmente diminuite.

Non seguiremo il Volterra nello studio del problema che si riferisce alla convivenza di un numero qualunque di specie che si nutrono le une delle altre, e in particolare dei casi di *associazioni conservative*. Rileveremo soltanto che i procedimenti da lui seguiti — la semplificazione ideale dei fatti, l'assunzione d'una continuità al posto di piccole variazioni discontinue ecc. — sono in tutto conformi ai principii generali dell'applicazione dell'analisi matematica, così come essi sono venuti foggiandosi ed elaborandosi nello studio della fisica. E con questo confronto appunto l'A. li giustifica teoricamente, mentre il riscontro delle previsioni teoriche coll'osservazione statistica, reca alla dottrina il conforto della verifica sperimentale.

F. E.